

www.salehkar.ir



ریاضی هشتم

(دوم متوسطه)

مؤلفان: حسین انصاری
سیامک قادر

www.salehkar.ir



www.salehkar.ir

به دنبال انتشار کتاب‌های ریاضیات پنجم، ششم و هفتم و استقبال شایان توجهی که از طرف دانش‌آموزان هوشمند و معلمان گرامی از آن‌ها شد بر آن شدیم تا با تدوین کتاب ریاضیات هشتم، خواسته‌ی آن دسته از دانش‌پژوهان جوانی که کتاب‌های موجود را پاسخگوی نیاز علمی خود نمی‌دیدند برآورده کنیم. امیدواریم این کتاب‌ها که با لطف و یاری خداوند منان در اختیار علاقمندان قرار می‌گیرند، به عنوان مکملی برای کتاب‌های درسی ریاضی، عطش علمی دانش‌آموزان تیزهوش را سیراب کنند.

در کتاب حاضر موضوعات و مفاهیم درسی به تفصیل بیان شده و مثال‌های متنوعی برای تفهیم بیش‌تر مطالب درسی آورده شده که این اثر را به یک خودآموز مبدل کرده است. در پایان هر فصل نیز تمرین‌های زیادی برای تکمیل یادگیری آورده شده لازم است دانش‌آموزان گرامی با تأمل و حوصله‌ی زیاد به حل آن‌ها بپردازند.

در این کتاب ۴۵۸ مثال، ۴۹۷ تمرین و همچنین ۶۶۰ تست آورده شده که مجموعاً شامل ۱۶۱۵ سوال حاوی نکات مهم و آموزنده است که مشتاقان علم ریاضی را در این مقطع سیراب می‌کند. تمرینات مشکل‌تر که با علامت * مشخص شده‌اند برای دانش‌آموزان تیزهوش و پرتلاش تألیف شده و سایرین نیازی به حل آن‌ها ندارند.

این اثر حاصل سال‌ها تجربه‌ی تدریس مولفان در مرکز تیزهوشان بوده و برای استفاده‌ی دانش‌آموزان مراکز سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان گردآوری شده است. البته دانش‌آموزان سرآمد دیگر مدارس که از توان ذهنی و پشتکار مناسب برخوردار باشند نیز می‌توانند برای ارتقاء بنیه‌ی علمی خود از این کتاب بهره‌مند شوند.

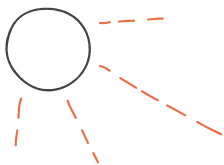
حسین انصاری

سیامک قادر

۲	عددهای صغیر و گویا	فصل اول
۲۹	حساب عددهای طبیعی	فصل دوم
۱۴۳	چند ضلعی‌ها	فصل سوم
۷۱	جبر و معادله	فصل چهارم
۹۹	بردار و مقدمات	فصل پنجم
۱۱۹	مثلث	فصل ششم
۱۶۱	توان و جذر	فصل هفتم
۱۹۳	آمار و احتمال	فصل هشتم
۲۱۵	دایره	فصل نهم
۲۳۵	پاسخ تمرین‌ها	
۲۴۲	پرسش‌های چهارگزینه‌ای	
۳۱۹	پاسخ‌نامه‌ی کلیدی	

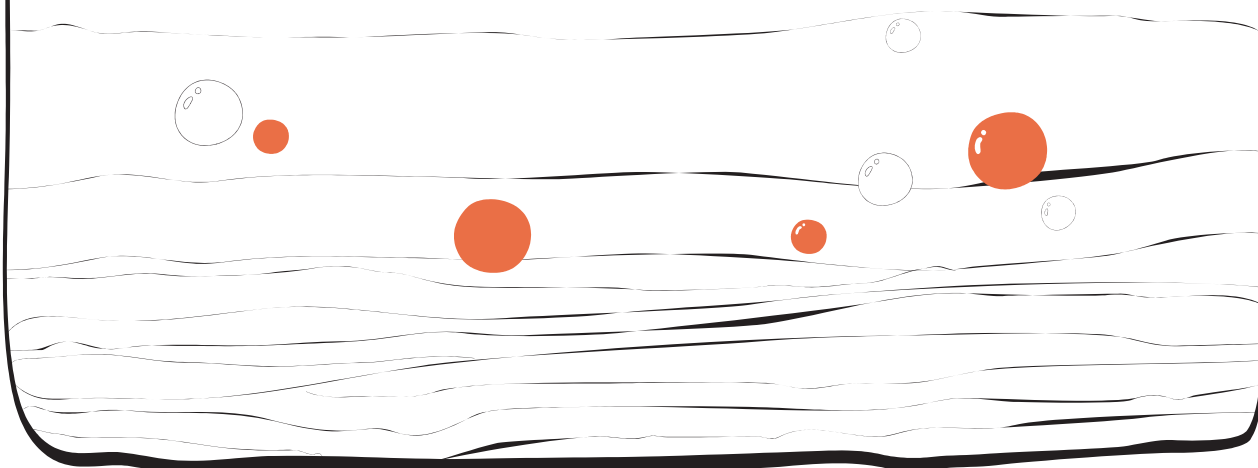
www.salehkar.ir

www.salehkar.ir



فصل اوّل

عدره‌های صبیح و گویا



عددهای صحیح گویا

www.salehkar.ir

درباره‌ی عددهای صحیح و اعمال آن‌ها در کتاب هفتم به تفصیل سخن گفته‌ایم در این بخش به ذکر چند مثال اکتفا می‌کنیم سپس به اعداد گویا می‌پردازیم.

مثال ۱: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $7 - 11 - (-9) + (-10)$

ب) $(-7 - 5) - (8 - 11) - (-12 + 17)$



الف) $7 - 11 - (-9) + (-10) = 7 + (-11) + 9 + (-10) = -5$

ب) $(-7 - 5) - (8 - 11) - (-12 + 17) = (-12) - (-3) - 5$

$$= -12 + 3 + (-5) = -14$$

مثال ۲: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $1 - (2 - (3 - 4) - 5) - 6$

ب) $9 - (8 - (7 - (5 - 11)))$

ج) $((13 - 19) - 15) - 8$

د) $(1 - 2 + 3 - 4) - (5 - 8 - 11)$



الف) $1 - (2 - (3 - 4) - 5) - 6 = 1 - (2 - (-1) - 5) - 6 = 1 - (3 - 5) - 6 = 1 - (-2) - 6 = -3$

ب) $9 - (8 - (7 - (5 - 11))) = 9 - (8 - (7 - (-6))) = 9 - (8 - 13) = 9 - (-5) = 9 + 5 = 14$

ج) $((13 - 19) - 15) - 8 = ((-6) - 15) - 8 = -21 - 8 = -29$

د) $(1 - 2 + 3 - 4) - (5 - 8 - 11) = (-2) - (-14) = -2 + 14 = 12$

مثال ۳: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $19 - 3 \times (-5)$

ب) $2 \times (-4) - (-3)(-2)$

ج) $(-2)(-3)(-4) - (-5)(-6)$

د) $5 - 5 [2 - 2(3 - 4)] \times (-6)$



الف) $19 - 3 \times (-5) = 19 - (-15) = 19 + 15 = 34$

ب) $2 \times (-4) - (-3)(-2) = (-8) - (+6) = -8 + (-6) = -14$

ج) $(-2)(-3)(-4) - (-5)(-6) = (-24) - 30 = -54$

$$\begin{aligned} \text{د) } 5 - 5 [2 - 2(3 - 4)] \times (-6) &= 5 - 5 [2 - 2 \times (-1)] \times (-6) = \\ 5 - 5 [2 + 2] \times (-6) &= 5 - 5 \times 4 \times (-6) = 5 - (-120) = 5 + 120 = 125 \end{aligned}$$

مثال ۴: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$\begin{aligned} \text{الف) } & 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 79 - 80 \\ \text{ب) } & -3 + 6 - 9 + 12 + \dots - 87 + 90 \\ \text{ج) } & (-20 + 7)(-20 + 8)(-20 + 9) \dots (-20 + 50) \\ \text{د) } & (1 - 6) + (2 - 7) + (3 - 8) + \dots + (71 - 76) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{الف) } 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 79 - 80 &= (1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \dots + (79 - 80) = \\ \underbrace{(-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1)}_{40 \text{ بار}} &= 40 \times (-1) = -40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } -3 + 6 - 9 + 12 + \dots - 87 + 90 &= \\ -3 + 6 + (-9) + 12 + \dots + (-87) + 90 &= \\ \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{15 \text{ بار}} = 15 \times 3 = 45 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } (-20 + 7)(-20 + 8)(-20 + 9) \dots (-20 + 50) &= \\ = (-20 + 7)(-20 + 8)(-20 + 9) \dots \underbrace{(-20 + 20)}_0 \dots (-20 + 50) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{د) } (1 - 6) + (2 - 7) + (3 - 8) + \dots + (71 - 76) &= \\ \underbrace{(-5) + (-5) + (-5) + \dots + (-5)}_{71 \text{ بار}} = 71 \times (-5) &= -355 \end{aligned}$$

مثال ۵: حاصل عبارات زیر را حساب کنید.

$$\text{الف) } 5 \times (-2)^3 - 3 \times 2^4$$

$$\text{ب) } 9 \times (3 - 4)^{17} - 7(6 - 7)^{10} - 3 \times (-4)^2$$



$$\text{الف) } 5 \times (-2)^3 - 3 \times 2^4 = 5 \times (-8) - 3 \times 16 = -40 - 48 = -88$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } 9 \times (3 - 4)^{17} - 7(6 - 7)^{10} - 3 \times (-4)^2 &= 9 \times (-1)^{17} - 7 \times (-1)^{10} - 3 \times 16 \\ &= 9 \times (-1) - 7 \times 1 - 3 \times 16 = -9 - 7 - 48 = -64 \end{aligned}$$

اعداد گویا

هر کسری مانند $\frac{a}{b}$ که در آن a و b اعداد صحیح و $b \neq 0$ باشد یک عدد گویا نامیده می‌شود. اعدادی مانند $\frac{3}{4}$ ، $\frac{-2}{5}$ ، 8 ، 0 ، 12 ، $-\frac{1}{3}$ و $\frac{7}{1}$ گویا می‌باشند.

مقایسه‌ی کسرها با واحد

الف- هر عدد کسری که صورت آن از مخرجش کوچکتر باشد از واحد کم‌تر است.

$$\frac{2}{5} < 1$$

$$\frac{3}{7} < 1$$

$$\frac{2}{9} < 1$$

ب- هر عدد کسری که صورت و مخرج آن با هم مساوی باشند با واحد مساوی است.

$$\frac{4}{4} = 1$$

$$\frac{7}{7} = 1$$

$$\frac{9}{9} = 1$$

ج- هر عدد کسری که صورت آن از مخرجش بزرگتر باشد از واحد بیشتر است.

$$\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} > 1$$

$$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} > 1$$

$$\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3} > 1$$

در هر یک از موارد فوق صورت و مخرج کسرها عدد طبیعی می‌باشند.

مقایسه‌ی کسرها با یکدیگر

الف- از دو کسر که مخرج‌هایشان مساوی باشد آن کسری بزرگتر است که صورتش بیشتر باشد.

$$\frac{5}{4} > \frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{7} < \frac{13}{7}$$

$$\frac{9}{15} > \frac{6}{15}$$

ب- دو کسر که هم صورت‌هایشان و هم مخرج‌هایشان مساوی باشند با هم برابرند.

$$\frac{7}{7} = \frac{7}{7}$$

$$\frac{9}{9} = \frac{5}{9}$$

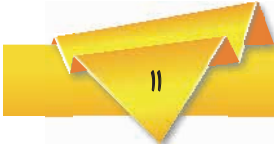
$$\frac{11}{11} = \frac{7}{11}$$

ج- از دو کسر که صورت‌هایشان مساوی است آن کسری بزرگتر است که مخرجش کوچکتر باشد.

$$\frac{5}{4} < \frac{5}{2}$$

$$\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$$

$$\frac{7}{11} > \frac{7}{15}$$



د- اگر دو کسر نه مخرج هایشان و نه صورت هایشان مساوی باشد ابتدا دو کسر را هم مخرج می کنیم سپس آن دو کسر را مقایسه می کنیم.

در هر یک از موارد فوق صورت و مخرج کسرها عدد طبیعی می باشند.

مثال ۶: دو کسر $\frac{3}{5}$ و $\frac{4}{7}$ را مقایسه کنید.

$$\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$$

$$\frac{21}{35} > \frac{20}{35} \Rightarrow \frac{3}{5} > \frac{4}{7}$$

مثال ۷: کسرهای زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

$$\frac{3}{5}, \frac{7}{15}, \frac{9}{20}, \frac{51}{60}$$

حل: بهترین مخرج مشترک کوچکترین مضرب مشترک مخرجها یعنی ۶۰ است.

$$\frac{3 \times 12}{5 \times 12} = \frac{36}{60}$$

$$\frac{7 \times 4}{15 \times 4} = \frac{28}{60}$$

$$\frac{9 \times 3}{20 \times 3} = \frac{27}{60}$$

$$27 < 28 < 36 < 51 \Rightarrow \frac{27}{60} < \frac{28}{60} < \frac{36}{60} < \frac{51}{60} \Rightarrow \frac{9}{20} < \frac{7}{15} < \frac{3}{5} < \frac{51}{60}$$

مثال ۸: به جای \circ در عبارات زیر علامت $<$ یا $=$ یا $>$ قرار دهید.

الف) $\frac{5}{6} \circ \frac{7}{9}$

ب) $\frac{11}{18} \circ \frac{7}{12}$

ج) $-\frac{1}{2} \circ -\frac{1}{4}$

د) $-\frac{5}{3} \circ -\frac{7}{2}$

ه) $-\frac{3}{5} \circ \frac{13}{-5}$

و) $\frac{-3}{4} \circ \frac{-5}{6}$



الف) $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$

$$\frac{7}{9} = \frac{14}{18}$$

$$\frac{15}{18} > \frac{14}{18} \Rightarrow \frac{5}{6} > \frac{7}{9}$$

ب) $\frac{11}{18} = \frac{22}{36}$

$$\frac{7}{12} = \frac{21}{36}$$

$$\frac{22}{36} > \frac{21}{36} \Rightarrow \frac{11}{18} > \frac{7}{12}$$

ج) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

د) $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$

$$\frac{7}{2} = \frac{21}{6}$$

$$\frac{10}{6} < \frac{21}{6} \Rightarrow -\frac{10}{6} > -\frac{21}{6} \Rightarrow -\frac{5}{3} > -\frac{7}{2}$$

ه) $-\frac{3}{5} = -\frac{13}{5} = \frac{13}{-5}$

و) $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{9}{12} < \frac{10}{12} \Rightarrow -\frac{9}{12} > -\frac{10}{12} \Rightarrow \frac{-3}{4} > \frac{-5}{6}$$

ساده کردن کسرها به کمک بزرگترین مقسوم علیه مشترک

می‌دانیم اگر صورت و مخرج یک کسر را در یک عدد صحیح غیر صفر ضرب یا بر این عدد تقسیم کنیم کسری مساوی آن کسر به دست می‌آید.

$$\frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۶} = \frac{۶}{۹} = \frac{۸}{۱۲} = \dots \quad \text{مثلاً:}$$

$$\frac{۴۵}{۶۰} = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴} = \dots \quad \text{یا}$$

هنگامی که صورت و مخرج یک کسر را بر یک عدد غیر صفر تقسیم می‌کنیم می‌گوییم کسر را ساده کرده‌ایم. برای این که یک کسر را فقط با یک تقسیم ساده کنیم می‌توانیم ابتدا بزرگترین مقسوم علیه مشترک صورت و مخرج کسر را به دست آوریم سپس صورت و مخرج را بر آن تقسیم کنیم.

مثال ۹: کسر $\frac{۴۸}{۷۲}$ را ساده کنید.



$$۴۸ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳$$

$$۷۲ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳$$

$$(۴۸, ۷۲) = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ = ۲۴$$

$$\frac{۴۸}{۷۲} = \frac{۲ \times ۲۴}{۳ \times ۲۴} = \frac{۲}{۳}$$

مثال ۱۰: کسر $\frac{۱۴۸}{۲۲۲}$ را ساده کنید.



$$۱۴۸ = ۲ \times ۲ \times ۳۷$$

$$۲۲۲ = ۲ \times ۳ \times ۳۷$$

$$(۱۴۸, ۲۲۲) = ۲ \times ۳۷ = ۷۴$$

$$\frac{۱۴۸}{۲۲۲} = \frac{۲ \times ۷۴}{۲ \times ۱۱۱} = \frac{۷۴}{۱۱۱}$$

مثال ۱۱: کسرهای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{۳۴ \times ۵۷}{۱۹ \times ۵۱} \times \frac{۶}{۱۵}$

ب) $\frac{۲۶ \times ۷ \times ۱۲}{۲۰ \times ۹۱ \times ۴۲}$



$$\text{الف) } \frac{\overset{2}{\cancel{24}} \times \overset{3}{\cancel{57}} \times \overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{19}} \times \underset{3}{\cancel{51}} \times \underset{5}{\cancel{15}}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{ب) } \frac{\overset{1}{\cancel{26}} \times \overset{1}{\cancel{7}} \times \overset{1}{\cancel{14}}}{\underset{5}{\cancel{20}} \times \underset{7}{\cancel{91}} \times \underset{1}{\cancel{42}}} = \frac{1}{35}$$

مثال ۱۱: کسرهای $\frac{5}{24}$ و $\frac{7}{18}$ و $\frac{11}{30}$ را هم مخرج کرده و به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

حل: کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها را به عنوان مخرج مشترک در نظر می‌گیریم.

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$(24, 18, 30) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$$

$$\frac{5}{24} = \frac{75}{360}$$

$$\frac{7}{18} = \frac{140}{360}$$

$$\frac{11}{30} = \frac{132}{360}$$

$$\frac{75}{360} < \frac{132}{360} < \frac{140}{360} \Rightarrow \frac{5}{24} < \frac{11}{30} < \frac{7}{18}$$

جمع و تفریق اعداد کسری

برای بدست آوردن جمع و تفریق کسرها ابتدا کسرها را هم مخرج کرده سپس صورت‌ها را جمع یا تفریق می‌کنیم. بهترین مخرج مشترک کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌هاست.

مثال ۱۲: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } \frac{7}{36} + \frac{1}{54}$$

$$\text{ب) } \frac{11}{45} - \frac{7}{60}$$

$$\text{الف) } 36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$(36, 54) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$$

$$\frac{7}{36} + \frac{1}{54} = \frac{21}{108} + \frac{2}{108} = \frac{23}{108}$$

$$\text{ب) } 45 = 3 \times 3 \times 5$$

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$(45, 60) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$$

$$\frac{11}{45} - \frac{7}{60} = \frac{44}{180} - \frac{21}{180} = \frac{23}{180}$$

مثال ۱۳: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{5}{12} - \frac{19}{48} + \frac{15}{72} - \frac{1}{96}$$

کوچکترین مضرب مشترک مخرجها ۲۸۸ است.



$$\frac{5}{12} - \frac{19}{48} + \frac{15}{72} - \frac{1}{96} = \frac{120}{288} - \frac{114}{288} + \frac{60}{288} - \frac{3}{288}$$

$$= \frac{120 - 114 + 60 - 3}{288} = \frac{63}{288} = \frac{7}{32}$$

مثال ۱۵: حاصل عبارت $12 - 4\frac{3}{5}$ را به دست آورید.



$$12 - 4\frac{3}{5} = 11\frac{5}{5} - 4\frac{3}{5} = 7\frac{5-3}{5} = 7\frac{2}{5}$$

مثال ۱۶: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\frac{-4}{15} + \frac{7}{10}$

ب) $\frac{-7}{24} + \frac{-5}{36}$

ج) $\frac{-8}{15} - \frac{-4}{9}$

د) $\frac{-1}{16} - \frac{-3}{8}$



الف) $\frac{-4}{15} + \frac{7}{10} = \frac{-8}{30} + \frac{21}{30} = \frac{-8+21}{30} = \frac{13}{30}$

ب) $\frac{-7}{24} + \frac{-5}{36} = \frac{-21}{72} + \frac{-10}{72} = \frac{-21+(-10)}{72} = \frac{-31}{72}$

ج) $\frac{-8}{15} - \frac{-4}{9} = \frac{-24}{45} - \frac{-20}{45} = \frac{-24-(-20)}{45} = \frac{-4}{45}$

د) $\frac{-1}{16} - \frac{-3}{8} = \frac{-1}{16} - \frac{-6}{16} = \frac{-1-(-6)}{16} = \frac{-1+6}{16} = \frac{5}{16}$

مثال ۱۷: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $-\frac{2}{3} - \frac{-1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{-1}{8}$

ب) $-3 - (-1\frac{2}{5})$

ج) $\frac{5}{21} - \frac{1}{14} - \frac{-3}{7}$

د) $(-\frac{7}{18}) - (-\frac{11}{24}) + (-\frac{5}{36})$



الف) $-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{-1}{8} = \frac{-16+12-20+(-3)}{24} = \frac{-27}{24} = \frac{-9}{8}$

ب) $-3 - (-1\frac{2}{5}) = -3 + \frac{7}{5} = \frac{-15+7}{5} = \frac{-8}{5}$

ج) $\frac{5}{21} - \frac{1}{14} - \frac{-3}{7} = \frac{10-3-(-18)}{42} = \frac{25}{42}$

د) $(-\frac{7}{18}) - (-\frac{11}{24}) + (-\frac{5}{36}) = \frac{-28+33+(-10)}{72} = \frac{-5}{72}$

ضرب و تقسیم اعداد کسری

مثال ۱۸: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $-\frac{19}{13} \times \frac{-52}{38}$

ب) $\frac{14}{-15} \times \frac{-20}{21}$

ج) $(-\frac{19}{26}) \div (\frac{-38}{39})$

د) $\frac{33}{17} \div \frac{22}{-34}$



الف) $-\frac{19}{13} \times \frac{-52}{38} = +\frac{1}{1} \times \frac{4}{2} = 2$

ب) $\frac{14}{-15} \times \frac{-20}{21} = +\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$

ج) $(-\frac{19}{26}) \div (\frac{-38}{39}) = +\frac{19}{26} \times \frac{39}{38} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

د) $\frac{33}{17} \div \frac{22}{-34} = \frac{33}{17} \times \frac{-34}{22} = -\frac{3}{1} \times \frac{2}{2} = -3$

مثال ۱۹: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $1 - \left[\left(-\frac{5}{24} \right) - \frac{11}{-36} \right] \times \frac{-12}{7}$

ب) $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{1378})$

ج) $1\frac{1}{10} + 2\frac{2}{10} + 3\frac{3}{10} + \dots + 45\frac{45}{10}$

د) $10 - 10 \left[5 - 5(2-3)^{11} \right] \times (-3)$



الف) $1 - \left[\left(-\frac{5}{24} \right) - \frac{11}{-36} \right] \times \frac{-12}{7} = 1 - \left[\frac{-15 + 22}{72} \right] \times \frac{-12}{7}$

$$= 1 - \frac{7}{72} \times \frac{-12}{7} = 1 - \left(-\frac{1}{6} \right) = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

ب) $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{1378}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{1377}{1378} = \frac{1}{1378}$

ج) $1\frac{1}{10} + 2\frac{2}{10} + 3\frac{3}{10} + \dots + 45\frac{45}{10} =$

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 45) + \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \dots + \frac{45}{10} \right)$$

$$= \frac{45 \times 46}{2} + \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 45}{10} = 1035 + \frac{1035}{10} = \frac{11385}{10} = \frac{2277}{2}$$

د) $10 - 10 \left[5 - 5(2-3)^{11} \right] \times (-3) = 10 - 10 \left[5 - 5 \times (-1) \right] \times (-3) = 10 - 10 \times 10 \times (-3) = 10 + 300 = 310$

مثال ۱۱: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\frac{(-5)(-6)(-7) - (-2)(-3)(-4)}{(-2)(-3)(-4)(-5) - (-3)(-9)}$$

حل:

$$\frac{(-5)(-6)(-7) - (-2)(-3)(-4)}{(-2)(-3)(-4)(-5) - (-3)(-9)} = \frac{-210 - (-24)}{120 - 27} = \frac{-186}{93} = -2$$

$$12 - 2 \times 5^2 - 3 - 2(5-6)^7 \times (-2)$$

مثال ۱۲: حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

حل:

$$12 - 2 \times 25 - 3 - 2 \times (-1) \times (-2) = 12 - 50 - 3 - 4 = -45$$

مثال ۱۳: حاصل عبارت $\frac{2}{-3} - \frac{-3}{4} + \frac{4}{-5}$ را به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} \frac{2}{-3} - \frac{-3}{4} + \frac{4}{-5} &= \frac{-2}{3} - \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} \\ &= \frac{2 \times (-2) + 15 \times 3 - 12 \times 4}{60} = \frac{-40 + 45 - 48}{60} = \frac{-43}{60} \end{aligned}$$

مثال ۱۴: حاصل کسر $\frac{13 - 2\frac{3}{4}}{\frac{15}{4} - \frac{2}{7} \times \frac{14}{3}}$ را پیدا کنید.

حل:

$$\frac{13 - 2\frac{3}{4}}{\frac{15}{4} - \frac{2}{7} \times \frac{14}{3}} = \frac{12\frac{4}{4} - 2\frac{3}{4}}{\frac{15}{4} - \frac{4}{3}} = \frac{10\frac{1}{4}}{\frac{45-16}{12}} = \frac{\frac{41}{4}}{\frac{29}{12}} = \frac{41 \times 12}{4 \times 29} = \frac{123}{29}$$

مثال ۱۵: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\frac{4\frac{12}{21} \times \frac{35}{48}}{5\frac{7}{18} - 3\frac{4}{9}}$

ب) $\frac{(\frac{5}{9} - \frac{1}{18}) \div (\frac{5}{6} - \frac{4}{5})}{\frac{4}{5} - 2\frac{6}{9} + 3\frac{1}{15}}$

ج) $\frac{2\frac{4}{5} \div 1 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{10} + \frac{2}{5} \div 1 + \frac{1}{4}}$

د) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{2}{3}}}$



$$\text{الف)} \quad \frac{\frac{12}{4} \times \frac{35}{48} = \frac{96}{21} \times \frac{35}{48} = \frac{10}{3} = \frac{10}{3} = \frac{18 \times 10}{3 \times 35} = \frac{12}{5}}$$

$$\frac{5}{18} - \frac{3}{9} = \frac{5}{18} - \frac{6}{18} = \frac{5-6}{18} = \frac{-1}{18}$$

$$\text{ب)} \quad \frac{(\frac{5}{9} - \frac{1}{18}) \div (\frac{5}{6} - \frac{4}{5}) = \frac{10-1}{18} \div \frac{25-24}{30} = \frac{1 \times 30}{2 \times 1} = \frac{15}{1} = \frac{15 \times 45}{234} = \frac{15 \times 5}{26} = \frac{75}{26}}$$

$$\frac{\frac{4}{5} - \frac{2}{9} + \frac{3}{15}}{\frac{24}{5} - \frac{24}{9} + \frac{46}{15}} = \frac{216 - 120 + 138}{45} = \frac{234}{45}$$

$$\text{ج)} \quad \frac{\frac{2}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{14}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{14 \times 10}{5 \times 7} \div \frac{1 \times 4}{2 \times 5} = \frac{4}{1} \div \frac{2}{5} = 4 \times \frac{5}{2} = 10}$$

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{5}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{10}{15} + \frac{6}{15}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{16}{15}}{\frac{5}{4}} = \frac{16}{15} \times \frac{4}{5} = \frac{64}{75}$$

$$\text{د)} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{2}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{3}}} = 1 + \frac{1}{1+3} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

مثال ۲۵: حاصل هریک از عبارات زیر را بدست آورید:

$$\text{الف)} \quad \frac{70}{91} \div (\frac{5}{39} - \frac{7}{26} + \frac{9}{52})$$

$$\text{ب)} \quad (\frac{3}{50} - \frac{7}{75} - \frac{1}{125}) \div \frac{31}{500}$$

$$\text{ج)} \quad (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}) \div (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4})$$

$$\text{د)} \quad \frac{2\frac{3}{5} + 4\frac{2}{15}}{3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}}$$

$$\text{الف)} \quad \frac{70}{91} \div (\frac{5}{39} - \frac{7}{26} + \frac{9}{52}) = \frac{70}{91} \div (\frac{20-42+27}{156} = \frac{70}{91} \div \frac{5}{156} = \frac{70}{91} \times \frac{156}{5} = 24$$

$$\text{ب)} \quad (\frac{3}{50} - \frac{7}{75} - \frac{1}{125}) \div \frac{31}{500} = (\frac{45-70-6}{750}) \div \frac{31}{500} = \frac{-31}{750} \div \frac{31}{500} = \frac{-31}{750} \times \frac{500}{31} = \frac{-2}{3}$$

$$\text{ج)} \quad (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}) \div (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{6+4-3}{12} \div \frac{6-4+3}{12} = \frac{7}{12} \div \frac{5}{12} = \frac{7}{12} \times \frac{12}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\text{د)} \quad \frac{2\frac{3}{5} + 4\frac{2}{15}}{3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}} = \frac{13 + \frac{62}{15}}{\frac{10}{3} - \frac{5}{2}} = \frac{\frac{39+62}{15}}{\frac{20-15}{6}} = \frac{101}{15} \div \frac{5}{6} = \frac{6 \times 101}{15 \times 5} = \frac{202}{25}$$



مثال ۶۶: کسر $\frac{(-۳۴) \times ۷۷ \times (-۶۰) \times ۱۵}{۵۵ \times (-۲۴) \times (-۵۱)}$ را ساده کنید.



$$\frac{(-۳۴) \times ۷۷ \times (-۶۰) \times ۱۵}{۵۵ \times (-۲۴) \times (-۵۱)} = \frac{۲ \times ۷ \times ۵ \times ۱۵}{۵ \times ۲ \times ۳} = ۷ \times ۵ = ۳۵$$

مثال ۶۷: حاصل جمع زیر را حساب کنید.

$$(۴ \times ۱ + ۳) + (۴ \times ۲ + ۳) + (۴ \times ۳ + ۳) + \dots + (۴ \times ۵۰ + ۳)$$



$$(۴ \times ۱ + ۳) + (۴ \times ۲ + ۳) + (۴ \times ۳ + ۳) + \dots + (۴ \times ۵۰ + ۳) =$$

$$(۴ \times ۱ + ۴ \times ۲ + ۴ \times ۳ + \dots + ۴ \times ۵۰) + \overbrace{(۳ + ۳ + ۳ + \dots + ۳)}^{۵۰ \text{ بار}}$$

$$۴ \times (۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۵۰) + ۵۰ \times ۳ = ۴ \times \frac{۵۰ \times ۵۱}{۲} + ۱۵۰ = ۵۱۰۰ + ۱۵۰ = ۵۲۵۰$$

کسر مسلسل

به مثال زیر توجه کنید:

$$\frac{۹}{۵} = \frac{۵+۴}{۵} = \frac{۵}{۵} + \frac{۴}{۵} = ۱ + \frac{۴}{۵} = ۱ + \frac{۱}{\frac{۵}{۴}} = ۱ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۴}}$$

عبارت $۱ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۴}}$ را یک کسر مسلسل گویند.

کلاً اگر $a, b, c, \dots \in \mathbb{Z}$ باشند آنگاه عبارت زیر به یک کسر مسلسل معروف است.

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{\vdots}}}$$

$$-۱ + \frac{1}{-۲ + \frac{1}{-۳ + \frac{1}{\vdots}}}$$

مثال ۶۸: کسر مسلسل روبرو نمایشگر چه عددی است؟



$$-1 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{-3 + \frac{1}{4}}} = -1 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{-11}} = -1 + \frac{1}{-2 - \frac{4}{11}} = -1 + \frac{1}{-\frac{26}{11}} = -1 - \frac{11}{26} = \frac{-26-11}{26} = \frac{-37}{26}$$

مثال ۱۹: کسر مسلسل روبرو را به یک کسر ساده تبدیل کنید.

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$



$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{3+2}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{5+3}{5} = \frac{8}{5}$$

کسره‌های تلسکوپی: اگر a و b اعداد طبیعی و $a < b$ باشد می‌توان گفت:

$$\frac{b-a}{a \times b} = \frac{b}{a \times b} - \frac{a}{a \times b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

مثال ۲۰: حاصل عبارت $\frac{1}{10 \times 11} + \frac{1}{11 \times 12} + \frac{1}{12 \times 13} + \dots + \frac{1}{29 \times 30}$ را حساب کنید.



$$\begin{aligned} \frac{1}{10 \times 11} + \frac{1}{11 \times 12} + \frac{1}{12 \times 13} + \dots + \frac{1}{29 \times 30} &= \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{29} - \frac{1}{30} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

مثال ۲۱: حاصل عبارت $\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots + \frac{2}{19 \times 21}$ را حساب کنید.



$$\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots + \frac{2}{19 \times 21} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} = \frac{1}{3} - \frac{1}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

مثال ۲۲: بین $\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{6}$ دو کسر پیدا کنید.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$$



بین ۴ و ۵ عدد صحیحی وجود ندارد. حال صورت و مخرج را در ۳ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{4}{6} \times \frac{3}{3} = \frac{12}{18}$$

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{3} = \frac{15}{18}$$

حال بین ۱۲ و ۱۵ دو عدد صحیح ۱۳ و ۱۴ وجود دارد بدین ترتیب $\frac{13}{18}$ و $\frac{14}{18}$ دو کسر بین $\frac{2}{3}$ و $\frac{5}{6}$ می‌باشند.

$$\frac{2}{3} < \frac{13}{18} < \frac{14}{18} < \frac{5}{6}$$

مثال ۱۳: در عبارات زیر برای X سه مقدار مختلف به دست آورید.

الف) $\frac{4}{5} < x < \frac{9}{10}$

ب) $\frac{7}{5} < x < \frac{3}{2}$



الف) $\frac{32}{40} = \frac{4}{5} < \frac{33}{40} < \frac{34}{40} < \frac{35}{40} < \frac{36}{40} = \frac{9}{10}$

ب) $\frac{7}{5} = \frac{14}{10} < \frac{3}{2} = \frac{15}{10}$

$$\frac{7}{5} = \frac{14}{10} \times \frac{4}{4} = \frac{56}{40}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{15}{10} \times \frac{4}{4} = \frac{60}{40}$$

$$\frac{56}{40} = \frac{7}{5} < \frac{57}{40} < \frac{58}{40} < \frac{59}{40} < \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$$

مثال ۱۴: دو کسر بین $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{3}$ نام ببرید که مخرج آن‌ها ۲۰ باشد.

$$\frac{1}{5} = \frac{12}{60} \quad \frac{1}{3} = \frac{20}{60}$$

حل: کوچک‌ترین عددی که به ۳ و ۵ و ۲۰ بخشپذیر می‌باشد. عدد ۶۰ است.

$$\frac{12}{60} < \frac{15}{60} < \frac{18}{60} < \frac{20}{60} \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{5}{20} < \frac{6}{20} < \frac{1}{3}$$

مثال ۱۵: کسری مساوی $\frac{91}{143}$ پیدا کنید که مخرجش ۱۱۰ باشد.



$$\frac{91}{143} = \frac{x}{110} \rightarrow x = \frac{110 \times 91}{143} = 70 \Rightarrow \text{کسر مورد نظر} = \frac{70}{110}$$